On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)\,dx$$

$x \mapsto x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)$ est continue sur $[0,1]$

et $\forall x \in [0,1]$

on $x^n\sqrt{1-x} \geqslant 0$

et $(x-1) \leqslant 0$

Donc $x^n\sqrt{1-x}\,(x-1) \leqslant 0$

Donc $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)\,dx \leqslant 0$

Ainsi $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

Donc (I_n) est décroissante